数理解析研究所講究録 1392 巻 2004 年 214-224

関孝和の行列式の再検討

佐 藤 賢 一

1. はじめに

「和算」の実質的な完成者は、通常関孝和(? − 1708)と見做されている。事実そうなのであるが、彼の業績の詳細については一般的には意外と知られていない。また和算史専門家の間でも関の数学の解釈については不明な点が多数残されている。1) 試みに、関の業績と言われるものの一部を挙げてみよう[1]。まず、彼は記号代数的方法(傍書法)を創始して和算を「算術」から「代数」へ脱皮させた。それに伴って高次代数方程式を、現在Horner法と呼ばれる方法で組織的に解いた(天元術)。さらには西洋の数学とほぼ時を同じくして「行列式」の概念に到達した、など。この表面的な追跡だけでも関の数学者としての能力には計り知れないものがあるのだが、数学史的に彼を見なければならない我々としてはただ感嘆してはいられない。もっと関自身の数学に踏み入って、その姿を白日の元に晒さねばならない。その過程で自ずから和算の新たな位置付けも得られよう。本論はそのためのささやかな試みである。

ここで問題とするのは関の最大級の業績と言われる「行列式」の概念についてである。従来、この部分の紹介のされ方は過度に西洋数学を意識したものとなっていた。和算と西洋数学を比較し、前者を顕彰するためとはいえ、両者に共通する「行列式」はしばしば無条件に同一のものとして扱われていた。実はそうではなかった、というのが本論考の結論の一つである。そして、関の「行列式」に関しては未だに新しい解釈の余地が残されている。それを示すことが筆者のもう一つの目標である。筆者が分析にかける関の著作は『解伏題之法』[2](1683)と名付けられている。ページ数にしてわずか十数ページの写本ではあるが、この中に関は代数学的成果を圧縮して詰め込んでいる。その簡潔な記述のために本書は当時から難解な書として有名で、関流では一時秘伝扱いされていた。江戸時代を通じてこれの注釈書は4書しか出されていない[3]。2) 以後の議論に支障のないよう、『解伏題之法』の内容を略述しておく。簡単に言えば、本書の主題は「方程式の導き方」である。3) 与えられた問題に対して適切な未知数を設定し(天元の一を立てるという)、題意に従って方程式(開方式)を組み立ててゆくのだが、当時の和算の問題は現在の我々から見れば不必要なくらいに複雑な問題が多かった[4]。それゆえ、求める数値のみを未知数として立てただけでは処理できない場合が生じてくる。そこで関は補助未知数を適宜導入して方程式を容易に得られるよう操作する。補助未知数を導入すれば未知数の数だけ関係式が必要になることは言うまでもない。簡単のために真の未知数xと補助未知数yの場合を考える。

$$F(y)=f_0(x)+f_1(x)y+f_2(x)^2y+\dots+f_m(x)y^m=0$$

朱書

1) それなら、専門家でない人の新解釈にも真剣に向き合ってほしい。
2) 何万もある本を全部調べたのか？ 国書総目録にももっと多く記載されている。
3) 題名のいう通り、伏題を解く方法、即ち、二つ以上の未知数を含む代数方程式系が消去法によって一つの未知数しかもたない代数方程式に帰着できることを示した本である。

$$G(y)=g_0(x)+g_1(x)y+g_2(x)y^2+\dots+g_n(x)y^n=0$$

($f_0, \dots, f_m, g_0, \dots, g_n$ は x の多項式)

目標は F＝0 と G＝0 から補助未知数 y を消去して真の未知数 x のみの方程式を得ることである。我々はこのような問題に対してはFとGについての終結式を用いればよいことを知っている。（計算は非常に厄介であるが。）関もやはり原理的に同一の方法を採っている。4) この終結式を求める最終段階で彼は現在言うところの「行列式」を提出しているのである。次節ではこの関の方法を解説する。

2. 『解伏題之法』生尅第五篇

関が具体的に「行列式」のことを述べているのはこの標題を持つ部分に於てである。

得換式、験変治之後、求生尅也[5]。

わずかこの1行を述べただけで、すぐに関は4次までの行列式の項を正しく列挙している。「換式」5) とは1節で導入した F＝0 と G＝0 の2式（n ≧ m とする）から、y^n の項を消去する際に得たn個の（n－1）次方程式である。「変」と「治」は式の簡約法の一種である。「生尅」とは行列式の各項の符号を指示する。つまり「生」が「正」、「尅」が「負」である。この字面だけ 6) から判断するなら、関の「行列式」を求める際の着眼点は「各項の符号を定めること」にあったと言えよう。関が示したものを実際に見ていこう。

2次：

一式	a	b
二式	c	d

7)

ad（＋）	○	${}_{1}$bd

cb（－）	○	${}_{1}$bd

[6]

一式は a＋by＝0, 二式は c＋dy＝0 を表している。そして、a, b, c, d は全て x についての多項式である。この2つの式から y を消去するのは容易で、結果として ad－cb＝0 が得られる。これは2次の行列式と一致しているが、先に述べたとおり得られた式は真の未知数 x についての方程式なのである。尚、○より右の"${}_{1}$bd"は相殺される項を示す。また、（＋），（－）はその項に付けるべき符号である。原文では「生」、「尅」と書かれている。この原則は以下3次、4次についても同様である。

3次：

一式	a	b	c
二式	d	e	f
三式	g	h	i

aei（＋）	○	${}_{1}$bei	${}_{4}$cei
dhc（＋）	○	${}_{2}$ceh	${}_{5}$cfh
gbf（＋）	○	${}_{3}$bfh	${}_{6}$bfi

ahf（－）	○	${}_{3}$bfh	${}_{5}$chf
dbi（－）	○	${}_{1}$bei	${}_{6}$bfi
gec（－）	○	${}_{2}$ceh	${}_{4}$cei

[7]

朱書

4) 関は世界ではじめて終結式を定義し、加減乗法のみを用いる消去法によって一未知数の場合に還元できることを示した。

5) 「換式」こそ関と Bézout をきわだたせることが理解されていない。

6) こういうごまかしをしてはいけない。略、省、約、縮は誰にもわかるが、われわれの論文以外[に]変や治が許される理由を述べた論文があれば教えてほしい。

7) この transcription は不可。関は常に最高次の項から順次消去したことが見すごされている。

2次の場合と同じく、例えば一式は $a + by + cy^2 = 0$ のことである。○の右側の項は対応する番号間で相殺する。この表の意味するものは、aei + dhc + gbf − ahf − dbi − gec = 0である。各項の文字の並べ方は関が示した順番に従っているので、必ずしもアルファベット順にはなっていない。ところが○より右にある項は全てアルファベット順に並んでいる。ここに何か法則性が潜んでいるのではないかと筆者は考えた。(2次の場合でも同じで、ad, *cb*, bdの順になっている。)これに気付いたことによって以下の考察が生じた。さらに詳しく関の計算結果を追跡しよう。 8)

関は3次の行列式の6つの項を2つのグループに分ける。この類別は決して符号によって分けられているのではない。(それは4次の場合を見れば明白となる。)アルファベットのままでは扱いにくいので次の記号を導入する。9) 定義より行列式の各項の因数は、行列の成分を行と列に関して1つずつ重複のないように選び取ることによって構成される。そこで行列成分の「配置」を1つの順序対に対応させる。10)
例えば4次の行列式の1つの項 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ を取ったとき、これに(1342)という順序対を対応させるのである。この記号によると、

aei = (123), dhc = (231), gbf = (312),
ahf = (132), dbi = (213), gec = (321).

これら6つの順序対は、置換と同一視することで、群(3次対称群)を成す。この記号を用いて関の提示した項の配列を見直してみよう。

(+) : (123) → (231) → (312)
(−) : (132) → (213) → (321)

数字1つずつの「順送り」(1 → 2, 2 → 3, 3 → 1の巡回置換を施す操作)によって次の項が得られるのである。3次の場合はわずか6項ばかりで何の困難もなさそうに思われるが、4次の場合の24項ともなるとこの方法による構成・分類の簡便さが歴然と現れる。11)

4次:

一式	a	b	c	d
二式	e	f	g	h
三式	i	j	k	l
四式	m	n	o	p

①

afkp	(+)
ejod	(−)
inch	(+)
mbgl	(−)

②

ankh	(−)
ebol	(+)
ifcp	(−)
mjgd	(+)

③

afol	(+)
ejcp	(−)
ingd	(+)
mbkh	(−)

12)

朱書

8) そのような写本は見たことがない。どこにあるのか。
9) 誰の定義か? 関は今の定義を知るはずがない。
10) 誰が対応させたのか。こういうところがいつもあいまいである。そして著者の恣意をあたかも関の書いたことのように読者をたぶらかしている。
11) 以下次頁中頃まで斜乗のパターンで6つに分けたという一見して明白なことを、さも新発見のようにもったいぶって書いている。
12) 符号がすべて違っている。

④ 13)　⑤　⑥

④	⑤	⑥
angl (+)	ajoh (+)	ajgp (−)
ebkp (−)	encl (−)	enkd (+)
ifod (+)	ibgp (+)	iboh (−)
mjch (−)	mfkd (−)	mfcl (+)

(8)

(相殺する項は削除している。また、①-⑥の番号は筆者が便宜上付けたものである。)3次の場合と同様の記号を用いてこれら24項の構成を見ておこう。

①：(1234)→(2341)→(3412)→(4123)
②：(1432)→(2143)→(3214)→(4321)
③：(1243)→(2314)→(3421)→(4132)
④：(1423)→(2134)→(3241)→(4312)
⑤：(1342)→(2413)→(3124)→(4231)
⑥：(1324)→(2431)→(3142)→(4213)

1で始まる順序対を(符号をとりあえずは考えずに)6つ最初に決めてしまえば、残りは「循環的」に構成できる。関が着目した点は恐らくここにあったのであろうと筆者は推測する。最初の6つの順序対の決め方は簡単である。3次の行列式で求めた6項を4次の行列の中に「埋め込め」ばよい。(すなわち、1行1列で余因数展開したときの3次の小行列を考える。)よって、関の行った項の分類は必然的に6グループとなる。n次の行列式に対しては(n − 1)次の小行列式を用いることによって、5次以上の項も構成することができる。

しかしこれまでの記述では各項の符号のことは問題にしなかった。4次の場合の符号の出現の仕方には、3次の場合と違って一見しただけでは規則性が現れない(14)。関が符号を決定するという意味で「生尅」を重視したのも納得がいくのである。現在我々が行う余因数展開では、展開するij成分に対して符号として$(-1)^{i+j}$を対応させる。(結果として+と−が交互に現れる。)ところが関の方法では小行列式を用いずに、これを分解した各項を循環的に配置するので、統一された符号の規則をこの時点では見いだすことができなかったのであろう。一々列挙していたのでは埒が明かないので、関は次のように述べてこの列挙を4次で打ち切っている。

> 各逐式、交乗、而得生尅也。雖然相乗之数位繁多、而不易見故、以交式斜乗代之(9)。
> (各々の逐式、交乗し、生尅を得るなり。然りと雖も相乗の数位繁多にして、見易からざる故に、交式斜乗を以て之を代ふ。)

関はこの生尅を得る方法を「交乗」と呼んでいたらしいが、これはあまりに繁雑で見にくいから「交式」と「斜乗」に代えると言っている。次節ではこの関の簡約化された方法を検討しよう。

朱書

13) ③と④の順序が錯乱していたとすれば、すべての疑問は氷解する。[1999年前橋で開かれた漢字圏数学史会議で佐藤賢一氏が発表した] 新発見の写本はこうなっていたのではないかというのが私の [佐藤氏宛2002年4月23日付けの手紙での] 問いであったが、いつものように返事はなかった。
關の時代の論理は (ベルヌーイなどでもなお) 一般的な例を示すことによって行われていた。従ってこの場合4次の行列式の例のなりたちを徹底して解明してはじめて關の定式化が理解できる。これまでの研究はそれを怠ってきたために不可解であったのである。

14) ここでもごまかしはいけない。

3. 交式と斜乗

本節では関の原文を見る前に、議論が錯綜するので論点を先に整理する。従来の解釈と、筆者が新たに提出する解釈との相違から始める。

従来の解釈とは、関没後の松永に始まり、昭和の藤原等に至る一連の解釈体系である。彼等の主要な論点は交式と斜乗を一組の操作と見做して説明することであった。15) むしろ斜乗の印象的な図(現在Sarrusの方法と呼ばれる図を含む)を重視し、その図にうまく対応するように交式をアド・ホックに改変するのである。ところがこの方法を用いると、まず交式の構成方法が不明となり、換五式の段階で誤りが生じる。さらには斜乗の換五式でも致命的な誤りが出てしまう。この解釈を採ると「二重の誤り」は必然的に生じてしまう。これでは「関は正しい結果を得られなかった」という否定的な結論を下さざるを得ない。関は列挙によって示した4次の場合までしか正しい結果を得ていないことになる。

そこで筆者は従来の解釈とは根本的に異なる見方を採る。まず、交式と斜乗の関連性の判断を一旦保留し、両者を独立の操作として扱う。このことによって「二重の誤り」を少なくとも「単一の誤り」にすることが可能となる。これは交式の帰納的構成法を筆者が案出し、その数学的意味付けをも行えたことに由来する。これによって、斜乗についての関の誤りは単なる初歩的な誤りと見做せる可能性も開けたのである。16) 筆者が強調しておかねばならぬことは、「交式について関は間違っていなかった可能性もある。」ということである。17)

以上のことを念頭に、関の原文とその解説に移ろう。尚、紙幅の都合で従来の解釈については詳細に検討できない。注の文献を参考にしていただきたい(10)。

従換三式、起換四式。従換四式、起換五式。逐如此(換二式換三式不及交式也)順逆共遞添一得次、乃式数奇者、皆順、偶者順逆相交也。

換三式

順	順	順
1	2	3

換四式

順	逆	順	逆
1	2	3	4
1	3	4	2
1	4	2	3

換五式

1	2	3	4	5
1	3	2	5	4
1	4	5	2	3
1	5	4	3	2
1	2	4	5	3
1	4	2	3	5
1	5	3	2	4
1	3	5	4	2
1	2	5	3	4
1	5	2	4	3
1	3	4	2	5
1	4	3	5	2

(換三式より、換四式を起こす。換四式より、換五式を起こす。逐って此の如くす(換二式換三式は交式に及ばざるなり)順逆共に遞いに一を添へ次を得、乃ち式数奇なるもの、皆順、偶なるもの順逆相交わるなり。)

(11)

朱書

15) [交式と斜乗の] 一方をきりはなしてどうして行列式の定義乃至展開ができるのか。いいかげんなことを云ってはいけない。
16) この論文の典型的な statement。何もいわないのと同じ。
17) [交式] とは何をすることか明確に述べよ。そのところをあいまいにして正否はたしかめようがない。

18)
「交式」の項はこれが全文である。わずかこれだけの情報から我々は関の計算結果を再構成しなければならない。まず、交式(換式)は帰納的に構成されること。その方法は順の場合も逆の場合も共通に1を添える(加える)ことによって次の換式を得る。そして換n式においてnが奇数の場合は全て順、偶数の場合は順と逆が交わる。(順と逆が何を意味しているのかは全く説明がない。)

関の言いたいことはむしろその次に記された3つの数字配列にあるのだろう。これらの中から法則性を見つけねばならない。少々乱暴な天下りになるが、筆者が気付いたところの法則性を置換の用語で要約する。「換n式の数字配列は、1を先頭とする長さnの偶置換である。19)」[12]例えば換三式123を置換(1→1, 2→2, 3→3)と同一視する。この置換の転倒数[2]は0だから偶置換である。換五式の中の15432は置換(1→1, 2→5, 3→4, 4→3, 5→2)と同一視する。この置換は転倒数が6であるから、これも偶置換である。他も同様である。長さnの置換のうち偶置換は合計n!/2個あり、その中でも1を先頭とするものはその1/nの(n－1)!/2個となる。関が示しているものはn = 3, 4, 5の場合である。 20)

何故ここで置換など持ち出すのかと言えば、それは行列式の定義と密接に結び付いているからである。行列式の各項の因数の配列に1つずつ置換を対応させ、その偶奇によって符号を割り振ればよい。ここで偶置換は(＋)に対応する。関が求めたかったものはこの符号の割り振り方であったから、この方法を得ただけで目標は達成されたことになる。換n式の各々を前節で導入した記号を用いて、例えば(13254)のように表してみると分かり易いであろう。これは行列式の各項の因数の順番を示すものであった。この配列が偶置換ならば符号は正を与えればよい。すなわち換n式によって「循環的」に行列式を求める際、正(生)で始めるべきグループ(4次の場合で言えば①、④、⑤)を知ることができる。残りのグループは負(尅)から始めればよい。

次に行わねばならないのはこの符号が各グループ内でどのような周期で現れるかを決定することである。結論を先に言えば、nが偶数のときは正負が交互に現れ、奇数のときは同符号のみが現れる。21) n = 3, 4の場合を見ていただきたい。(この1点が従来の解釈とは大きく異なり簡略化された部分である。従来の解釈を採ると周期は4通りにもなってしまう。)何故この2通りで十分かという理由は以下で説明する換n式の帰納的な構成法によって明らかとなるだろう。

関が掲げている順番にまず換三式から換四式を構成する。(123)に長さ3の巡回置換を掛ける。

(123)→(231)→(312)

これら3つに今度は関が「添一」と呼ぶ操作を行う。

(123)→(234)→(1234)
(231)→(342)→(1342)
(312)→(423)→(1423)

この操作は最初の数字にそれぞれ1を加え、さらに先頭に1を置く。これによって換四式が得られる。

朱書

18) この論文を含め？これまで[の]論文とわれわれの論文の違いは「交式」を和算でいう同級、即ち同じ次数の係数からなる行の置換としたことである。
19) 現代人には明白。しかし、関は対称群も交代群も知らなかったと思う。
20) 再び、誰の定義かと問いたい。
21) これは関の書いてあることそのままであって新しい解釈でもなんでもない。関の失敗は同じ定数項から出発する左斜乗と右斜乗が常に異符号と早とちりしたことにある。数学者は自分もしょっちゅうする失敗だから許せるが、数学史家は三上をはじめわめきたてて、関の功績を台なしにしてしまった。

次にこれと同様の操作を行って換四式から換五式を導かねばならないが、ここで問題が生じる。換四式に長さ4の巡回置換を掛けると、偶置換と奇置換が交互に出てきてしまって具合が悪い。そこで関は巧妙な手段を採る。巡回置換を掛ける代わりに2個の互換の積を順次掛けていくことを行う[4]。これを示唆するのが換四式に記されている「順逆」の文字である。(1234)で見てみよう。互換の記号として(i, j)を使う。矢印は「添一」の操作である。 -2 /

(1234) → (12345)

(1, 2)(3, 4)(1234) = (2143) → (13254)

(1, 4)(2, 3)(2143) = (3412) → (14523)

(1, 2)(3, 4)(3412) = (4321) → (15432)

数字の1が順次左へ推移するように互換の積を作る。1を互換する操作が「順逆」に相当すると仮定している。他の交式、(1324), (1423)についても同じ操作を施せばよい。これで換五式が完成する。筆者が用いた方法によれば、関が述べてはいなかった換六式以降も構成できる。換六式と換七式を見てから一般化しよう。換六式は容易である。長さ5の巡回置換を換五式に順次掛けて「添一」の操作を施せば60個の配列が得られる。それらは1で始まる偶置換を全て網羅している。換六式から換七式を求めるには置換の偶奇を考えねばならない。(順逆を考慮するということ。)(123456)を例に説明しよう。関は12個の換五式を上から4つ目ごとに区切った4×4の部分(1を除く)の対角線上に同一の数字を並べている。ここでもこれに倣って構成する。

(123456)

(1, 2)(3, 4, 5, 6)(123456) = (214563)

(1, 4)(2, 5, 6, 3)(214563) = (541632)

(1, 6)(5, 4, 3, 2)(541632) = (436125)

(1, 2)(4, 3, 6, 5)(436125) = (365214)

(1, 4)(3, 6, 5, 2)(365214) = (652341)

(i, j)は互換、(p, q, r, s)は置換(p → q, q → r, r → s, s → p)を表す。ここでの長さ4の巡回置換は6を順次左に移す操作に対応する。この場合対角線上に1と6を並べた。これに「添一」を行えば換七式が得られる。

ここで一般化しておこう。①換(2m + 1)式は互換(1, k)と長さ2(m − 1)の巡回置換の積を換2m式に掛け、「添一」を行うことで構成する。(巡回置換の取り方は一意的ではないが、結果として得られる換式の集合は同一なることが証明される。)②換2m式は長さ(2m − 1)の巡回置換を換(2m − 1)式に掛け、「添一」を行うことによって得られる。

以上が、筆者が帰納的に再構成した関の交式(換式)である。

次に「斜乗」を検討する。

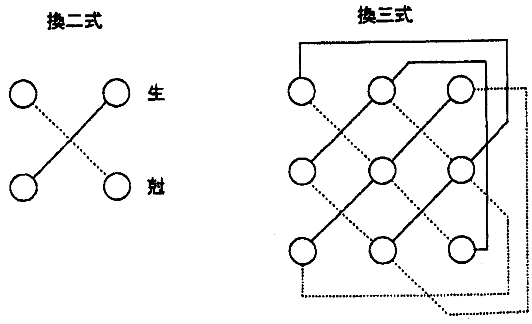
朱書

22) 先行研究、例えば加藤 [33] p.146, に述べられていることをさも自分の発見のように云う根性がさもしい。
以下に述べられていることは n 個の文字の偶順列全体の構成法であるがこれを関の仕事と結びつけるのは著者の恣意に過ぎない。数学的な命題であるが、証明はない。$(n-1)$ 次行列式の生項の順序に添一すれば n 次の交式が求まるのであるから、独立に計算する必要は全くない。

交式各布之従左右斜乗、而得生尅也(若当空級者除之)。換式数奇者、以左斜乗為生、以右斜乗、為尅。偶者、左斜乗、右斜乗共生尅相交也[15]。
(交式各々之を布き左右より斜乗して生尅を得るなり(もし空級に当れば之を除く)。換式の数奇なるものは、左斜乗を以て生と為し、右斜乗を以て尅と為す。偶なるもの、左斜乗、右斜乗共に生尅相交わるなり。)

この関の説明も甚だ分かりにくい要素を含んでいる。「交式を布く」とはどういうことなのか。23)「布く」を「広げる」と解釈することも可能であるが、事実ははっきりしない。左右の斜乗は次に関が掲げている図から判断することができる。そしてここでも関は「生尅」の分類を偶数と奇数の2つのカテゴリーにのみ分けている。

[図]



この図[16]が示す換二式と換三式は我々にも馴染みの深いSarrusの方法と呼ばれるものである。この2つの図の原理を他の場合に適用しようとすれば、換四式以降、この「たすき掛け」の方法は破綻してしまう。行列式に必要な項数が満たされず、また積の取り方による符号の付け方にも食い違いが生じるからである。故に、関以降の解釈家達はこの図を「救う」ために、先に見た換n式を一式からn式までの配列順番を示していると考えた。24) その後に改めて斜乗を取る。現代の用語で言えば、行(列)の入れ換えに相当する。これによって合理的な解釈はできるが、関の原文に従って説明できるのは換四式だけだったことは前述した。
そこで筆者は斜乗を交式と切り離して独立のものと見做し、これを単純な誤りと考える。25) 関自身、4次はもちろん5次の行列式でさえ列挙することによって正しく求めることができたはずである。ところが換四式と換五式についての斜乗は明白な誤りである。関は何故重訂までした書の中にこのように誤った図式を載せなければならなかったのか。26)

4. 『大成算経』の交乗法

『大成算経』[17](1709年成立。以下『算経』と略)は関孝和と建部兄弟(賢明・賢弘)が1683年から編纂を開始した書である。関の業績と言われるものはほとんど網羅されている、当時の数学の百科事典的書物であったが、印刷されず、少数の写本が出回っただけのようである。関は途中健康上の理由で編纂事業から降りたとされているが[18]、完全に手を引いたと考えるのは難しい。関は後々まで多分に影響力を行使していたと考えるのが自然であろう。

朱書

23) これを解明したのがわれわれの論文の要点である。[他]人の論文は批判する前によく読め!!
24) $n \equiv 1$ 又は $2 \bmod 4$ のとき、右斜乗をそのままで救うことは不可能である。
25) またまた著者の無責任な発言。
26) それに答えるのが数学史なのではないか。

この『算経』の中には「伏題篇」と題された個所があり、『解伏題之法』がほとんどそのまま収録されている。しかし「生尅第五」に当る部分だけが「交乗法」なる項目に代えられている。ここでは行列式を求めるためにまさしく余因数展開が為されている[19]。そして関が「生尅第五」の後半で述べていた「交式」と「斜乗」については全く言及せずに削除されている。1683年と1709年の間に行列式の求め方は格段に進歩したのである。27) 余因数展開が採用されたなら、複雑な「交式」の方法は不要になるのでこれを削除したのは納得がいく。しかし、何故「斜乗」まで削除したのか。少なくとも2次と3次の場合は正しかったのである。これについては、わずか2つの場合にしか当て嵌まらない図式には一般性がなく、完全を期しがたいという理由によって削除されたのではないかと推定する。28)

『算経』によって我々が言うところの「行列式」の導出に関する問題は全て解決されたはずである。29) ところが後の和算家が探求したものは『解伏題之法』の「交式」と「斜乗」についての解釈であった。関と建部兄弟が既に捨ててしまった解法について、いわば「無駄な努力」を彼等は惜しまなかった。

この事態を招いた背景の1つとして、関流の継承を巡る問題が存在していた。従来建部兄弟は関流和算においては傍流と見做されていた。正統関流を関自身から継承したのは荒木村英(1640~1718)であったとされる。しかし最近の研究では荒木の数学的能力や、関の数学を実際に継承したのかどうかが疑問視されている[30]。建部賢弘が荒木のことを批判し、悪人呼ばわりした歴史的証言も残されている[31]。荒木は関の遺稿群を何らかの方法で入手しただけらしい。彼は関の著作を批判的に読解する能力を有してはいなかったので、関の誤りもそのまま継承されたのであろう。(但し、関の『解伏題之法』は関の生前から写本として出回っていた可能性もある。)『算経』の草稿はもちろん建部兄弟が持っていたから荒木の目に触れるはずはなかった。正統関流の和算家の間で『算経』についてはそれ程言及されず、忘れ去られたかのような印象をしばしば受けるのはそのためである。『算経』が広く普及していたならば、和算の「行列式」はもっと速やかに受容されていたであろう。しかし歴史はそのような方向には作用しなかった。

5. 結語

30)

筆者は説明の都合上、関の「生尅」を「行列式」と翻訳して用いていたが、以上の記述から既に分かるように、両者は似て非なるものであることは明白である。関の「生尅」は数学的には終結式を導くことにしか使用されず、必然的に0となる場合しか問題にならなかった。さらにもう一度強調しておくが、「生尅」によって得られた式は、関にとっては未知数をただ1個含む方程式を意味していた。31) 多元1次連立方程式の係数行列から導かれる「行列式」とは抑々無縁なものであった。このような状況を無視して関の「生尅」と西洋数学の「行列式」を比較するのは無意味であろう。

本論で提示した「交式」についての新解釈は、筆者自身の認識としては、従来の解釈と競合する1つの仮説であると見做している。関自身がわずかの情報しか我々に残さなかったことから、彼の真意がどこにあったのかを見極めるのは新史料が発掘でもされないかぎり無理だろう。ただ1つ言えることは、関は「生尅」に関しては正しい方法を生前から知っていたということである。それは『大成算経』に記されていた。それでは、関が捨ててしまった方法(交式と斜乗)に今頃新解釈を付すなどという行為には何か意味があるのだろうか。答えは簡単である。筆者が目指すのは「数学史」的な関孝和の理解

朱書

27) これによって三上 [27] を読まなかったことが明らかな論文の関係者がどうして先行研究について大口をきく権利があるのか。

28) $n \equiv 0$ 又は $3 \bmod 4$ なら正しいから無限にあてはまる。

29) これは正しくない。建部も解伏題を十分に理解していたとはいえない。1685年頃は日本の数学の危機の時期であったとわれわれは考えている。

30) [われわれの論文第4節で明らかにしたように、行列式は洋の東西を問わず高次代数方程式系の消去のために導入された。ここはヨーロッパ数学史に対する無知をさらけ出している。]

31) 衆伏の例がはじめに与えられているのに無視してはいけない。関-Bézout の消去法が優れている点は消去しても新たな方程式がすべて多項式 $=0$ の形に表わされることである。従って同じ操作がくり返せる。

なのである。

注

(1) 関孝和の業績解説は次が一般的で参照しやすい文献である。

日本学士院編『明治前日本数学史』第二巻(岩波書店、1956)の第1章第2節「関孝和の業績」, pp.5-22. と第2章「関孝和」, pp.133-265. 本論に関する部分としては pp.198-209. を参照。平山諦『関孝和』(恒星社厚生閣、1959)

(2) 平山、広瀬、下平編『関孝和全集』(大阪教育図書、1974)所収、pp.141-158. 1683年の年紀は重訂の年である。写本としてしか伝わっていない。

(3) 松永良弼『解伏題交式斜乗之諺解』(1715)

菅野元健『補遺解伏題生尅篇』(1798) 32)

石黒信由『交式斜乗逐索』(1798)

同 『解伏題交式斜乗生尅補義』(1798)

この4書のいずれも板行されなかった。石黒と菅野は和算史上の同時発見としても有名である。

(4) 例えば関の生前唯一の刊本であった『発微算法』(1674)の第14問は、方程式に書き下すと1458次もの高次になってしまう。

(5) 『全集』, p.154.

(6) 同, p.154. 原文の記号は十干の最初の4つである。33)

(7) 同, p.154. 原文の記号は同じく十干である。34)

(8) 同, pp.154-155. 原文の記号は中国の星座の名称である二十八宿の一部(16個)である。35)

(9) 同, p.155.

(10) 注の(1)の文献の他に、次が数学的には詳しい。

加藤平左エ門『算聖 関孝和の業績』(槙書店、1972), pp.140-164. 36)

(11) 『全集』, pp.155-156.

(12) 群論の用語で言い換えることも可能である。

「換n式は交代群 A_n の部分集合で、1を先頭とする置換の集合である。」

(13) 転倒数(または転位数)とは置換 $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ において $i<k$, $p_i>p_k$ なる文字の組の数である。転倒数が偶数のものを偶置換、奇数のものを奇置換という。

(14) 互換は奇置換である。互換の偶数個の積は偶置換となる。

(15) 『全集』, p.156.

(16) 換四式と換五式は略。より詳細な図は『全集』, p.156. を参照。実線は(+), 点線は(-)の項を示している。

(17) 現在完全な形では活字になっていない。筆者が参照したのは次の文献の中の引用である。加藤『算聖 関孝和の業績』, pp.177-182.

朱書

32) これは二つの異なる本からなるからここにあげられているだけでも4ではなくて5つある。実際の写本、刊本を手にとって、それらを参照して論を立てなければ信用のおける論考は成立しません。

33, 34, 35) という位ならアルファベットにおきかえるときも順序を保つこと。

36) これには算法発揮(1690)、生尅因法伝(1758) について詳しい紹介がある。それを無視したのはどういうわけがあるのか? 竹之内 [37, 38] は田中由真や井関たちの方が早く行列式表示の終結式を発見したというのであるが、井関はこの論文と同じく $イ + ロx + ハx^2 + \cdots$ という表示を用いており、換式はそのために定数項から消去していくという不自然なことを行っている。また、次数についても $n = m$ の場合しか扱っていない。しかし、真の開拓者であった関と Bézout は共に $n > m$ の場合にも向きあって正しい行列式表示を得ている。

(18)　『明治前日本数学史』第二巻, p.23. 参照。

(19)　最初に余因数展開を発表したのは建部達ではなかった。大阪の井関知辰が『算法発揮』(1690)でこのことを公表していた。関・建部と井関との間に何か関係があったのかどうかは不明。加藤『算聖　関孝和の業績』, pp.165－177. 参照。

(20)　平山諦「関流宗統と荒木村英」、『数学史研究』116号(1988),　pp.37－43.

(21)　下平和夫「科学史入門：関孝和と建部賢弘」、『科学史研究』Ⅱ. 30号(1991), pp.147－153. 特に注(27)を参照。

[校正時付記]本論は筆者の卒業論文『関孝和における日本数学の伝統の確立』(1992)の一部を元にして書いたものである。執筆後一年以上経ち、稚拙な部分も目立つが敢えてそのままとした。本論の議論の中には新史料の発見等によって修正しなければならない点も出てきたが、詳細は1994年春に提出予定の修士論文において展開するつもりである。37)

この論文は、これが公刊されているのだから後藤-小松論文「17世紀日本と18–19世紀西洋の行列式、終結式及び判別式」は不要であると、日本科学史学会「科学史研究」編集委員会が判定した第一の根拠となった先行研究である。東京大学教養学部科学史・科学哲学研究室編集の雑誌「科学史・科学哲学」第11号(1993), pp.3–13 に掲載された。何も知らない人がこの「審査結果」を読むと、われわれの研究はこの論文の著者の学部卒業研究以下という印象を受けるであろう。そのように意図して書かれていることは明白である。この論文の著者佐藤賢一氏はこの判定をした編集委員会の委員であり、この委員会に他に和算史を専門とする人はいない。従って、編集委員会が上の判定をするについて佐藤氏が指導的な役割を果たしたことは間違いない。昨年7月に多くの委員が交代した中で、佐藤氏は学会の信任を受けて現在もなお編集委員会委員を続けておられる。

ここで朱書とした脚注は、私が2003年6月24日付けで、その前日に送った日本科学史学会伊東俊太郎会長宛の「日本科学史学会の考える数学史」についての講師派遣依頼に対する補足説明の付属文書として付けた佐藤論文に対する朱書を、印刷の都合上脚注の形に改めたものである。もとの朱書は一夜の仕事であったため遺漏が残り、その分は大括弧の中に入れて補った。学部卒業論文にこのような注を付けたことは忍びないが、佐藤氏がそれを根拠に掲載拒否を主張される以上やむをえない。

ところで、この雑誌「科学史・科学哲学」に掲載された論文は公刊されたといってよいのであろうか。国立情報学研究所のカタログによれば、現在この雑誌を継続収蔵している図書館は東京大学駒場図書館のみである。この講究録に再録するため、私は最近の改組で科学史・科学哲学研究室を引き継いだ広域科学専攻相関基礎科学系科学技術基礎論大講座主任の今井知正教授に今年6月8日付けで書面を送り再録許可を求めたのであるが、一ヶ月近くも返事を受け取ることができなかった。やむなく、ご自宅に電話をしてたずねたところ「大学院生が編集し、発行している雑誌の論文の再録許可について教官であるわたしが答えることはできない」という返事であった。もしこれが正しい答えなら、「科学史研究」編集委員会は東京大学教養学部旧科学史・科学哲学研究室関係者以外は「科学史研究」に投稿資格がないと判定したことになる。ここに再録するのは誰もが簡単に見ることができない論文であるためである。

佐藤賢一氏自身には2003年8月20日付けでカラー・コピーをお送りした。また、10月18日付けの手紙でこの講究録に再録する許可を求めた。そこでは、朱書を残すような野暮なことはいたしませんと書いたのであるが、どちらの手紙にも返事をもらえなかったので、私の裏切りは正当化されると思う。

小松彦三郎記

朱書

---

37)　論文を発表するときにこういう言い訳は許されない。